

## Una enseñanza no universitaria: la Aritmética mercantil\*

*Betsabé Caunedo del Potro\*\**

En múltiples ocasiones se ha repetido como en 1200 el monarca Felipe Augusto otorgaba unos primeros privilegios a los maestros y estudiantes parisinos que los desligaba de la autoridad del preboste situándolos bajo la del obispo. En 1231, el pontífice Gregorio IX, en virtud de la bula *Parens Scientiarum* reconocía definitivamente la autonomía de los mismos, pudiendo decir que se alcanzaba una primera madurez de la institución universitaria. Habían transcurrido 31 años. Entre ambas fechas fundacionales, otras muchas podríamos recordar: 1208, 1209, 1214, 1218, 1222, 1224, 1229, 1231<sup>1</sup>... Se abría un camino que refrendaba claramente un importante desarrollo cultural de la sociedad occidental.

También por entonces, otra fecha, 1202, inauguraba un nuevo momento en la historia del conocimiento. ¿Más modesto? Sí, pero igualmente importante, crucial para la historia de las matemáticas. Fue en 1202, cuando Leonardo de Pisa, Fibonacci (1180-1250) firma en lengua latina su *Liber Abaci*<sup>2</sup>. Familiarizado desde muy joven con el

---

\* Este trabajo ha sido elaborado en el marco del proyecto de investigación HUM2007-63856, *La transmisión del saber técnico y profesional: literatura técnica en la España Medieval*, subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología.

\*\* Universidad Autónoma de Madrid. Email: [betsabe.caunedo@uam.es](mailto:betsabe.caunedo@uam.es).

1 Remitimos a algunos trabajos de referencia obligada si quisiéramos enfrentarnos al tema de la universidad. Así, VERGER, J., *Les universités au Moyen Age*, París, 1973; IJSEWIJN, J. y PAQUET, J. (eds.), *The Universities in the Late Middle Ages*, Lovaina, 1978; RASHDALL, H., *The Universities of Europa in the Middle Ages*, 3 vols., Oxford, 1988 (reimp.) o RIDDER-SYMOENS, H. de, *A History of the University in Europe*, vol. 1, *Universities in the Middle Ages*, Cambridge, 1992.

2 L.E. SIGLER ha realizado en 2002 una traducción al inglés de esta obra de Fibonacci, *Fibonacci's Liber Abaci. A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, New York, 2002. Su figura es ensalzada y estudiada por SARTON, G., *Introduction to the History of Science*, II, pp. 611-613. También por todas las historias de las matemáticas generales. Así, por ejemplo, REY PASTOR, J., BABI-

mundo del comercio pues su padre había dirigido durante años la colonia mercantil de Bujía, familiarizado también con las técnicas de cálculo de los musulmanes aprendidas en sus numerosos viajes al mundo árabe, asimiló rápidamente los conocimientos matemáticos necesarios como para elaborar una obra como el *Liber Abbaci*. Con ella triunfarán definitivamente en Occidente las cifras indoarábigas, el valor y el uso del 0, la notación posicional en base 10 y las reglas necesarias para operar con ese sistema de numeración de posición. Lentamente sus ventajas se impondrán sobre el sistema romano tradicional. Una buena parte del *Liber Abbaci* comprende ejercicios prácticos, enuncia y resuelve problemas de muy diverso índole: de sociedades, de cambio, de aleaciones, conversiones monetarias...

Al igual que la fundación de la Universidad de París, Fibonacci no fue un ejemplo aislado. Su *Liber Abbaci* conoció una segunda edición en 1228. Ésta se la dedicó a su amigo y gran impulsor de la misma: Miguel Scoto, con quien frecuentaba la corte siciliana y la cercanía de Federico II, participando de su rico ambiente cultural y contribuyendo al mismo<sup>3</sup>. En esos mismos años, también alcanzarían una gran difusión, mayor incluso que la del *Liber Abbaci*, un texto de algoritmo en verso, *Carmen de Algorismo o Algorismus Metricus* del monje francés Alexander de Villadei y un *Algorismo Vulgaris* del inglés John of Holywood o Juan de Sacrobosco<sup>4</sup>. La versificación del *Carmen* —284 hexámetros— lo hizo muy popular a pesar de la mayor claridad de exposición

---

ANI, J., *Historia de la Matemática*, Buenos Aires, 1951 y 1975, pp. 86, 169-70; BOYER, C.B., *Historia de las Matemáticas*, Madrid, 1986, pp. 230-231. Un excelente resumen sobre la obra de Fibonacci, así como una abundante bibliografía sobre el mismo, la encontramos en: K. VOGEL, «Leonardo Fibonacci», en Ch.C. GILLISPIE (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 4, New York, Charles Scribner's Sons, 1981, pp. 604-613.

3 Fibonacci dedicó una de sus obras *Liber Quadratorum* a Federico II. En ella insistía en la importancia de basar el álgebra en métodos aritméticos. La influencia de Fibonacci en los algebristas ha sido puesta de manifiesto por FRANCI, R. y L. TOTI REGATELLI, «Towards a history of Algebra. From Leonardo of Pisa to Lucca Paccioli», *Janus*, 72, 1985, pp. 17-82.

4 Presentados por MILLÁS VALLICROSA, J.M.<sup>a</sup>, *Traducciones orientales en los manuscritos de la Biblioteca Catedral de Toledo*, Madrid, 1942, pp. 221-2. EVANS, G.R., «From Abacus to Algorism: theory and practice in Medieval Arithmetic», *British Journal for the History of Science*, 10, 1977, pp. 114-131, compara ambas obras. Una adecuada traducción al inglés de la mayor parte del texto de Sacrobosco, *Algorismus Vulgaris*, se puede encontrar en GRANT, E (ed., trad. y anot), «Arabic numerals and arithmetical operations in the most popular algorism of the Middle Ages», *A source book in Medieval Science*, Cambridge, 1974, pp. 94-102, y una edición crítica en, PEDERSEN, F.S., *Petri Philomena de Dacia et Petri S. Audomaro Opera Quadrivalia*. Pars I. *Opera Petri Philomenae*. (Corpus philosophorum dabicorum medii aevi X.i), Copenhague, 1983. Y sobre la obra del monje francés contamos con una edición de STEEL, R., *The Earliest Algorisms in English* (Early English Text Society, Extra Series, 118), Londres, 1922 y reimpresso en 1973. MENNINGER, K., *Number words and number symbols*, Cambridge, 1969. Estos trabajos los utiliza y a veces compara, SWETZ, F.J., *Capitalism and Arithmetic: the New Math of the fifteenth Century*, Open Court, 1987, pp. 28-9. Una breve aproximación a la figura de Sacrobosco nos la ofrece Olaf Pedersen, quien pone de relieve muchos datos oscuros tanto en su vida como en sus trabajos: «In quest of Sacrobosco», *Journal for the History of Astronomy*, XVI, 1985, pp. 175-221.

del texto en prosa de Sacrobosco, en el que después de hacer una breve exposición y descripción del sistema de numeración presenta las operaciones fundamentales. Para él, ocho: *numeratio, additio, subtractio, mediatio, duplatio, multiplicatio, divisio, progressio, radicum extractio*<sup>5</sup>. Muchos estudiantes aprendían de memoria fragmentos del *Carmen* y después consultaban, para aclarar dudas, el texto en prosa de Sacrobosco. La introducción en las aulas universitarias de estos dos manuales ha sido especialmente valorada por Beaujoan<sup>6</sup>.

¿Libros de Ábaco? ¿Libros de Algoritmo? Ambos comparten unos principios fundamentales, los que hemos descrito al comentar el *Liber Abbaci*; pero también se pueden apreciar diferencias: en los manuales de ábaco hay muy escasas referencias teóricas ya que se organizaban como una serie de ejercicios prácticos, mientras que en los algoritmos hay más reglas y menos ejercicios prácticos, pudiendo decir que sus textos son más cultos. Disociados de la vida diaria, podían ser objeto de enseñanza universitaria. Claramente se iban a distinguir de la aritmética mercantil, escrita, además en lengua vernácula. Pero ¿realmente tenían cabida en la universidad en sus primeros años de vida las matemáticas, incluso las más teóricas? Parece que Oxford las aceptó rápidamente, inscribiéndolas en sus programas universitarios. John of Holywood fue un autor comentado y su *Algorismo Vulgaris* conocido, aunque probablemente se valoraba solamente como un instrumento necesario para entender otras disciplinas como la astronomía<sup>7</sup>. No obstante, tiene el mérito de haber sido el primer texto universitario en introducir la numeración indo arábica<sup>8</sup>. París, más reactivo, insistía en que el cálculo sólo debía servir para el cómputo eclesiástico. Se limitó a tolerar estas enseñanzas de modo no oficial, sin promoverlas. Beaujoan, nos explica como el algorismo se enseñaba en la Universidad de París en 1290<sup>9</sup>. Pero se trataba de lecciones no obligatorias, al margen de la enseñanza oficial. Era impartida por maestros, en ocasiones en su propio domicilio, con carácter particular. Este aprendizaje, fuera de programa, se vio favorecido por la creación de los Colegios en el siglo XIV<sup>10</sup>. No obstante, en Francia, subsistió durante tiempo, la oposición entre algoritmos en latín y la aritmética comercial en provenzal o en francés. Beaujoan claramente distingue las dos formas de entender la disciplina y muestra una división geográfica: el norte con un cultivo primordial del uso del ábaco y una adaptación en sus textos del manual

5 PEDERSEN, O., «In quest of...», p. 200.

6 BEAUJOUAN, G., «L'Enseignement de l'Aritmétique élémentaire a l'Université de Paris aux XIII et XIV siècles. De l'Abaque a l'Algorisme», p. 105, en *Par raison de nombres. L'art du calcul et les savoirs scientifiques médiévaux*, pp. 93-121, Aldershot, 1991.

7 Disciplina que realmente le apasionó. Ver, además del trabajo de Pedersen ya citado, KNORR, W.R., «Sacrobosco's *Quadrans*: Date and sources», *Journal for the History of Astronomy*, XXXVIII, 1977, pp. 187-222.

8 PEDERSEN, O., «In quest of...», p. 199.

9 BEAUJOUAN, G., «L'enseignement...», p. 100.

10 *Ibidem*, p. 103.

de Sacrobosco; y el sur, que se convirtió en la zona de difusión de la nueva aritmética, escrita en lengua vulgar<sup>11</sup>. Jens Hoyrup también nos habla de la enseñanza de la aritmética fuera de programa en ciudades italianas: Bolonia, Florencia, Perugia..., donde servía para preparar otras disciplinas «auténticamente» universitarias<sup>12</sup>. Desconocemos lo que ocurría en Castilla hasta los primeros años del siglo XVI, momento en que parece que una aritmética «cultiva» estaba presente en las aulas universitarias. E. Sánchez Salor y J. Cobos Bueno señalan algunos manuales al uso en Alcalá y Salamanca<sup>13</sup>. En general, lo que si es una evidencia, es que la aritmética mercantil, eminentemente práctica, una auténtica matemática aplicada, no tuvo cabida en la universidad medieval. Fueron dos realidades diferentes, pues la Universidad considerará las «cuentas» asunto de comerciantes no de filósofos ni matemáticos. La institución no reconocía la nueva disciplina cuyo estudio, sin embargo, se desarrolló en el mismo ámbito urbano que la institución universitaria y como fruto del mismo espectacular desarrollo económico y social.

## 1. Escuelas y Manuales de Ábaco

### 1.1. Escuelas

La aritmética comercial se imponía, pero ¿dónde y cómo se podía conseguir ese aprendizaje adecuado que de ningún modo se iba a adquirir en la universidad?

¿Dónde? La pregunta puede tener una fácil respuesta, sobre todo si nos fijamos en algunos países. Italia, país pionero en el «arte del comercio», aparece también como pionero en el campo de la disciplina matemática. Y creó para su aprendizaje una institución, escuelas de ábaco, *botteghe*, escuelas privadas o públicas, que garantizaban la instrucción demandada por los nuevos hombres de negocios. Gino Arrighi, Rafaella Franci, Laura Toti Rigatelli, Richard A. Goldthwaite y Elisabetta Ulivi nos ofrecen un amplio y completísimo panorama sobre estos centros donde los futuros mercaderes adquirirían los rudimentos teóricos de su profesión<sup>14</sup>.

11 *Ibidem*, p. 123.

12 HOYRUP, J., *Jacopo da Firenze's Tractatus Algorismi and Early Italian Abacus Culture*, Basel, Boston, Berlín, 2007, p. 28.

13 SÁNCHEZ SALOR, E. y COBOS BUENO, J., «*Ars aritmética*» de Juan Martínez Siliceo. *Introducción, traducción y notas*, Cáceres, 1996, pp. 20-26.

14 ARRIGHI, G., «Un programa di didattica di Matematica nella prima metà del Quattrocento», *Atti e memorie della Accademia Petrarca di lettere, arti e scienze*, 38, 1986, pp. 117-28. GOLDTHWAITE, R., «Schools and Teachers of Commercial Arithmetic in Renaissance Florence», *Journal of European Economic History*, 1, 1972, pp. 418-433. Se detiene en la explicación de su funcionamiento en pp. 22-23. FRANCI, R. y RIGATELLI, L. T., *Introduzione all' Aritmética Mercantile del Medioevo e del Rinascimento*, Urbino, 1982, pp. 25-26. Más recientemente, ULIVI, E., «Scuole e maestri d'ábaco», en E. GIUSTI (ed.), *Un ponte sul mediterraneo: Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente*,

## 1.2. Manuales de Ábaco

¿Cómo? También la respuesta puede ser fácil. Utilizaron como hoy unos «manuales», tratados específicos que les facilitaba el mismo. Independientemente de que algunas escuelas hayan dejado estructurado su método de enseñanza, vemos como los manuales seguían claramente un método, un camino para lograr un objetivo propuesto de antemano y relacionado con los intereses de los alumnos. Estos manuales, los manuales de ábaco, eran elaborados por los propios maestros de ábaco que frecuentemente estaban al frente de las escuelas que acabamos de mencionar. Estaban escritos en lengua vulgar que fue lo que realmente garantizó su éxito ante una población que ya no conocía el latín. Desde 1288-1290 en el que se publicó el primer libro de ábaco en lengua vulgar<sup>15</sup>, elaborado en Umbría, hasta 1500, fueron más de 300 los textos que salieron a la luz. Dominaron los italianos, pero no fueron los únicos, ya que textos franceses, castellanos, catalanes, alemanes... ayudan a completar un rico y variado elenco presentado por Van Egmond en su magnífico catálogo<sup>16</sup>. Esta proliferación justifica plenamente el término «cultura del ábaco<sup>17</sup>» que estaba adquiriendo la denominada aritmética mercantil.

No todos estos manuales tienen un mismo origen, pero sí presentan todos una estructura básica y se organizan en cuatro o cinco grandes bloques<sup>18</sup>, pues la disposición interna de un manual responde a ciertas reglas, que más o menos todos comparten. Nos vamos a fijar especialmente en los castellanos. Las partes serían:

---

pp.121-159, Florencia, 2002 y «Benedetto da Firenze (1429-1479), un maestro d'abbaco del XV secolo. Con documenti inediti e con un «Apéndice su abacisti e scuole d'abaco a Firenze nei secolo XIII-XVI». *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 22-1, 3-243.

15 Ver, por ejemplo, el trabajo de HOYRUP, J., «Leonardo Fibonacci and *abbaco* culture a proposal to invert the roles», *Filosofi og Videnskabsteori pa Roskilde Universitetscenter*, 1, 2004, pp. 1-31, donde presta especial atención a este primer escrito elaborado en Umbría a finales del siglo XIII, y que considera mucho más que una vernaculización de Fibonacci, ya que de sus 31 capítulos en al menos 23 no toma préstamos del Liber Abacci, inspirándose en otras fuentes.

16 El número de 300 nos lo proporciona VAN EGMOND, W., En su magnífico catálogo, *Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A catalog of italian Abacus Manuscripts and printed books to 1600*, Florencia, 1980. En este trabajo, p. 129, encontramos el número de 300. Después de su publicación, se identificaron, según el mismo autor una docena más. Hago un rápido recorrido a través de los mismos en *El arte del Alguarismo...* pp. 46-56. A ese elenco siguen añadiéndose títulos importantes, como los castellanos y algunos de los publicados por Jens Hoyrup en sus últimos trabajos como el reseñado en la nota siguiente.

17 Jean Hoyrup así la denomina cuando nos explica la enorme difusión de estos manuales y como muchos de ellos se afanaban en mencionar a Fibonacci para reforzar su autoridad. HOYRUP, J., *Jacopo da Firenzes's Tractatus Algorismi...*, pp. 30-41.

18 En ocasiones alguno de ellos pueda faltar, bien porque se ha perdido o bien porque nunca se incluyó al querer incidir el manual en un tipo de operaciones concretas. Es el caso, por ejemplo, del manual castellano *De Arismetica*. Ver sobre el mismo mi trabajo, *De Arismetica. Un manual de aritmética para mercaderes*, *Cuadernos de Historia de España*, LXXVIII, 2003-4, pp. 35-46. Señala que el objetivo es enseñar a operar con fracciones «este libro es muy bueno y muy provechoso para saber multiplicar enteros e rotos»..., p. 42.

1. Introducción. Invocación religiosa y pequeña disertación sobre el valor de la aritmética.
2. Descripción del nuevo sistema de numeración.
3. Descripción de las operaciones básicas.
4. Conjunto más o menos abundante de casos prácticos, problemas resueltos.
5. Material misceláneo. Constan también estas obras de partes no aritméticas y que por tanto podríamos considerar material adicional. Así, pequeños listados con la ley de diferentes monedas, pentagramas y de un modo muy excepcional otros manuales como el *Libro que enseña ensayar cualquier moneda*<sup>19</sup>, que nos enseña a mezclar dos o más metales fundiéndolos.

Son las partes centrales: dos, tres y cuatro las que van a recibir nuestra atención en este trabajo, fijándonos especialmente en los diferentes elementos, medios o recursos de los que se ayudaron los maestros de ábaco para hacer posible su labor, pero insistiendo una vez más, en que el recurso didáctico por excelencia fue el propio libro elaborado con la intención de facilitar al maestro su función. Los manuales de ábaco se convirtieron rápidamente en la auténtica piedra angular que determinaba el aprendizaje de las habilidades aritméticas básicas.

## 2. Recursos didácticos

### 2.1. Descripción del nuevo sistema de numeración

El punto de partida de todos ellos es la presentación del nuevo sistema de numeración indo arábica y el trascendental valor de posición. En primer lugar se da a conocer los números en su representación escrita del 1 al 9. Llegar al conocimiento del número 10 agudiza el problema porque este numeral está compuesto de dos dígitos. Para lograr su aprendizaje se da una breve explicación sobre el 0 que es considerado símbolo especial. Se destaca que por si sólo este símbolo no vale nada, pero al poner unos o varios símbolos delante adquiere un elevado valor. Éste sorprende enormemente a los maestros de ábaco, lo que no debe extrañarnos, ya que en la numeración romana no existe símbolo para el dígito 0<sup>20</sup>. Una vez presentados los números se explica el valor de posición en el que las cifras cambian su valor dependiendo de su posición en el número escrito; así de derecha a izquierda la primera corresponde a las unidades, la segunda a las decenas, luego centenas, unidades de millar, decenas de millar, centenas de millar... La posición de cada cifra a medida que nos trasladamos de derecha a izquierda nos

---

<sup>19</sup> Inserto en *El Arte del Alguarismo*, publicado por Ricardo Córdoba. Recientemente este investigador ha ampliado sus reflexiones sobre el tema en: *Ciencia y Técnica monetarias en la España Medieval*, Madrid, 2009.

<sup>20</sup> Ver *El Arte del Alguarismo*, p. 69.

indica el valor relativo de la misma, por eso se dice que es un sistema posicional. La base del sistema es 10. Diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediatamente superior. Diez unidades forman una decena, diez decenas forman una centena, diez centenas forman una unidad de mil... Se insiste claramente en que el nuevo sistema está basado en dos principios: diez como base del sistema y posición.

También se explica como regula su escritura el sistema de posición. Las cifras se colocan una detrás de otra en una línea, dada la dirección de la lectura. Cualquier secuencia de cifras representa un número y sólo uno, y recíprocamente, cualquier número es representado por una secuencia de cifras y sólo uno. Esta escritura tiene la ventaja adicional de que cuanto más larga es la secuencia, mayor es el número y a la inversa, lo que permite una comparación rápida y sencilla. Por ejemplo, el 1001 que es más largo que el 888 es mayor. Si lo comparamos con la tradicional escritura romana presenta una ventaja importante: el 1001 es MI (de longitud dos), y el 888, que es menor, se escribe DCCCLXXXVIII (de longitud doce). Además de esta ventaja, se debe tener en cuenta la facilidad operativa del nuevo sistema frente al tradicional romano como nos muestra el manuscrito de la Biblioteca Nacional ... *segunt que ya avemos dicho una figura sola sinifica unidat, así como 1 senefica uno, e dos feguras en uno así puestas sinifica veynte e uno*... A partir de las centenas anota las cantidades con numeración romana «tres figuras asy puestas sinifican 321, III XXI, otrosí quatro feguras asy fechas 4321 sinifican IIII M CCC XXI, otrosí çinco figuras así puestas 54321 sinifican L IIII M CCC XXI..., otrosí nueve feguras e tales 987654321 sinifican IX LXXX VII MM DC IIII M XXI<sup>21</sup>.

Debemos matizar que si bien este sistema se identifica con el sistema numérico decimal actual, no ocurre lo mismo con la nomenclatura utilizada donde sí se aprecian cambios. Por ejemplo, en *El Arte del Alguarismo* que es el manuscrito castellano más prolijo en detalles sobre el sistema posicional en base diez, llama a las cifras del 1 al 9, *letras del algarismo* y al 0 *çifra*. El valor de cada cifra, que depende de su posición, es nombrado en el documento como *presçio* de lo que valen las letras.<sup>22</sup>

## 2.2. Descripción de las operaciones aritméticas fundamentales

Una vez que se ha explicado el sistema de numeración decimal, base indiscutible para comprender las operaciones fundamentales se presentan éstas: suma, resta, multiplicación, división, reparto proporcional, regla de tres y fracciones. Siempre se enseña primero qué tipo de acciones están asociadas a la operación estudiada, de modo que los alumnos pudiesen comprender en qué consiste dicha operación. Así, por ejemplo, en el caso de la suma, se explica que nos sirve para reunir varias cantidades

21 Así se señala en el Ms. 10106 conservado en la B.N. Raros, presentado en mi trabajo «Three Castilian Manuscripts on Mercantile Arithmetic and their problems of alloys», *Imago Temporis Médiæ Aevum*, 3, 2009, pp. 171-188.

22 *El Arte del Alguarismo*, p. 69.

en una sola<sup>23</sup>. La mecánica se repite en todas las operaciones aunque no todos los manuales castellanos incluyen las mismas, ni siquiera, como ya hemos apuntado, se conservan en todos las cinco partes. *De Arismetica*<sup>24</sup> no se inicia con la invocación religiosa, tampoco se presenta la obra ni se especifica su uso, valor o utilidad. Le falta un pequeño índice o resumen así como ya hemos señalado la exposición general del sistema de numeración indo arábigo, el valor de posición y la sucinta explicación de las operaciones fundamentales, pues la obra se inicia con la presentación del objetivo clave: enseñar a operar con fracciones *Este libro es muy bueno y muy provechoso para saber partir e multiplicar enteros e rotos*<sup>25</sup>. Tras una breve explicación del sistema de numeración, el manuscrito 10106 de la Biblioteca Nacional<sup>26</sup> introduce directamente una *cuarta regla*, que es operar con fracciones<sup>27</sup>, y expone a continuación diversos casos de división de fracciones: fracciones entre sí o con números enteros y también mixtos. Tras 27 ejercicios de este tipo, incorpora dos que podemos asignarlos a lo que hoy conocemos como progresiones. En los mismos, se indican procedimientos matemáticos, perfectamente válidos, para calcular la suma de los términos de las progresiones aritméticas formados por los números pares en un ejercicio e impares en el otro<sup>28</sup>.

El manual de Mosén Juan de Andrés<sup>29</sup> publicado ya en los primeros años del siglo XVI sustituye, acorde con los tiempos, la invocación religiosa por la dedicatoria al noble a quien está destinado: *muy ilustre y muy magnífico señor Don Seraphin, conde de Silva y señor de las villas de Nulles y Pego*. Incluye además de las operaciones fundamentales reglas muy específicas para los mercaderes como la *regla de la compañía*, la *regla de las baratas* y la *regla de la falsa posición*<sup>30</sup>.

### 3. Problemas

Las colecciones de problemas constituían el elemento esencial del manual y por tanto del aprendizaje. Mas o menos abundantes —entre los manuales castellanos nos encontramos con cantidades que oscilan entre los 192 del *Arte del Alguarismo* o los 48

23 *Ibidem*, pp. 69 y 70.

24 Ver mi trabajo, «*De Arismetica*. Un manual de aritmética para mercaderes...»

25 Real Academia Española, Ms. 145, fol. 145r. Ver nota anterior.

26 Manuscrito reseñado en la nota 21.

27 *Capitulo de la quarta de la postrimera regla abba, eso es partir por rotos e por enteros segunt que luego se sigue...* B.N. Raros, Ms. 10.106, en «Three Castilian Manuscripts...»

28 «Three Castilian Manuscripts...»

29 Ver mi trabajo «Un Manual de Aritmética mercantil de Mosén Juan de Andrés», *Pecunia*, 8, 2009, pp. 71-96.

30 Basándome en los problemas de este apartado he elaborado mi trabajo «Otros datos sobre las compañías comerciales castellanas en la Baja Edad Media», en *Castilla y el Mundo Feudal*. Homenaje a Julio Valdeón, Junta de Castilla y León, Salamanca, 2009, vol. I, pp. 625-638.



de *De Arismetica*<sup>31</sup>— ponían a prueba a los jóvenes estudiantes, pues para su resolución tendrían que aplicar los conocimientos teóricos explicados con anterioridad. Con ellos se buscaba ejercitar operaciones diferentes. Una de las principales características de estas colecciones es su perfecta adecuación al mundo real. Sus enunciados reflejan situaciones en las que los jóvenes se desenvolvían o tendrían que desenvolverse. Nos hablan de precios de mercancías, de beneficios, de intereses, de repartos, de cambios de monedas...mostrando, por tanto, realidades similares a las que iban a presentarse en su trabajo. Los supuestos prácticos que se planteaban eran totalmente congruentes y se ajustaban siempre a diversas experiencias del mundo mercantil. Pero incluso, en el caso de que algunos supuestos pudiesen ser ficticios<sup>32</sup>, respondían a necesidades reales y eran representativos de situaciones en las que podían verse envueltos los futuros mercaderes. Éstos fácilmente se identificarían con las circunstancias descritas en los ejercicios, escritos con un lenguaje comprensible para el grupo. En ocasiones, el autor del manual, antes de presentar el enunciado de los problemas, manifiesta la utilidad de la operación para el mercader. Así lo hace por ejemplo Mosén Juan de Andrés cuando contempla la operación de cambio que va a resolver utilizando la regla de tres. Explica su utilidad para aquellos que se vean involucrados en operaciones de largo alcance ... *has de saber que cambio real es aquel cambio que faze de una tierra en otra mediante una letra de cambio, la qual cosa se trata entre grandes mercaderes que tienen factores en muchas partes...*<sup>33</sup>.

En general, todos los problemas presentan una estructura prácticamente idéntica. Se dividen en dos partes: el enunciado o planteamiento y los cálculos que conducen a la solución. También el propio enunciado se divide en dos partes: una descripción de la situación donde nos ofrece los datos y condiciones que se deben cumplir, introducidos por frases del tipo *fas esta cuenta*, y después la pregunta en sí planteada por expresiones como *agora dime*, *agora pregunto*, *demándote que me digas...*

Encontramos un predominio total del texto escrito incluso durante la resolución del problema, momento en el que se hace una minuciosa descripción de las operaciones...

---

31 Reseñado en la nota 24.

32 Sería, por ejemplo, el caso de los problemas agrupados bajo la denominación «aritmetica recreativa» cuya finalidad es mejorar el razonamiento lógico de los jóvenes. Algunos aparecen en estas colecciones y nos permiten evocar a Beda, *De Arithmetis Propositionibus*, Alcuino, *Prepositiones ad acuendos juvenes* e incluso ejemplos anteriores. Ver Folkerts, M., «*De Arithmetis Propositionibus. A Mathematical Treatise Ascribed to the Venerable Beda*», *Essay son Early Medieval Mathematics. The Latin Tradition*, Aldershot, Ashgate Variorum, 2003, pp. 12-30 y «*The propositiones ad acuendos iuvenes* Ascribed to Alcuin», *Essay son Early Medieval Mathematics. The Latin Tradition*, Aldershot, Ashgate Variorum, 2003, pp. 31-76. Singmaster, D., «Some early sources in recreational mathematics», en *Mathematics from Manuscript to Print*, Hay, Cynthia, dir. Oxford, Clarendon Press, 1988, pp. 195-208, apunta a unos orígenes indios y chinos para muchos de estos problemas. Algunos aparecen en colecciones de Mohavira (850) y Abu Kamil (900) e insiste en que tuvo que haber trabajos árabes anteriores que los introdujesen.

33 Ver mi trabajo «Un Manual de Aritmética mercantil de Mosén Juan de Andrés...».

*di 4 e 3 son 7, sácalos de 12 e son 5 que fincan<sup>34</sup>; e tu debes multiplicar 7 en 7, que son 49 e después multiplicar 7 en 10 que son 70<sup>35</sup>.*

Las operaciones se repiten con insistencia buscando una cierta habilidad para operar con rapidez. Tenía sentido realizar muchas operaciones si estaban ligadas a una situación que se necesitaba resolver, bien en ese momento o en un futuro próximo, pues siempre se podían repetir en realidades diferentes a las de los contextos donde se habían aprendido. Este objetivo básico de utilizar el conocimiento adquirido en circunstancias similares pero no idénticas a aquellas en las que fue inicialmente adquirido queda claramente reflejado en el enunciado de los problemas con expresiones del tipo *e asy faras otra cuenta, e como esta cuenta feziste asy farás todas las otras quantas que desta manera sean, e segund esta cuenta se fizo se fara otra cualquier semejante desta ..E como esta cuenta feziste, asy farás todas las otras cuentas que desta manera vinieren e fueren...*<sup>36</sup> o *... e por esta regla faras todas las otras semejantes a estas*<sup>37</sup>... En ocasiones, todavía es más rotundo, *desta guisa farás todas las cuentas del mundo*<sup>38</sup>... o muestra las innumerables aplicaciones de las operaciones en circunstancias concretas. Es el caso, por ejemplo, de un ejercicio en el que se nos invita a multiplicar varas de paño. El autor señala que se puede utilizar tanto para varas de paño como de lienzo *... como de las otras cosas que se devan medir*<sup>39</sup>... tratando de resolver cualquier duda que se nos pueda presentar en el futuro. Queda claro que se traslada una situación reflejada en una infinidad de casos particulares al rango de una situación más general.

Además de destacar la total adecuación del enunciado de los problemas con el entorno y con los intereses de los alumnos, lo que les permitía reconocer la utilidad del aprendizaje para dar solución a una multiplicidad de problemas cotidianos, vamos a fijarnos en algunos recursos didácticos utilizados por los maestros de ábaco que elaboraban estos manuales y que pueden desprenderse de una lectura atenta de los mismos:

- Se resuelven la totalidad de los problemas planteados. Enunciado y resultado forman un todo integrado.
- Suelen aparecer ordenados por dificultad decreciente. Primero los más fáciles y a medida que el alumno progresaba se incrementa la dificultad. Es muy clara esta ordenación en el caso de los problemas de aleaciones de *Arte del Alguarismo*. Son 23 del total de la colección, el 12%, y se encuentran ordenados de menor a mayor dificultad.

34 *Arte del algarismo*, fol. 41r.

35 *Ibidem*, fol. 54r.

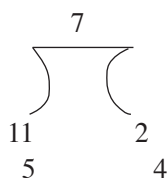
36 *Algarismo*, problema nº 93, prácticamente todos los problemas del *algarismo* recogen este tipo de expresiones.

37 «*De Arismetica...*», p. 44.

38 Problema 94 del *Algarismo*.

39 «*De Arismetica...*», p. 46.

- En algunos enunciados se incluye una señal de alerta genérica o específica para reclamar la atención del lector o alumno. Éstas tienen un tono familiar, *acuérdate, para mientes, para mientes en este punto, para bien mientes*<sup>40</sup>, *miémbrate*<sup>41</sup>... recordando cuestiones en las que ya se habría insistido especialmente. Preceden a la resolución del ejercicio y son totalmente necesarias para no cometer errores o equivocaciones.
- Excepcionalmente emplea signos, dibujos y/ o operaciones que confieren al ejercicio un valor especial y claramente facilitan su comprensión, memorización o invitan a concentrarse en casos especialmente difíciles<sup>42</sup>. Son escasos en los primeros manuales y se incluyen con mayor frecuencia a medida que va transcurriendo el tiempo. Así el *El Arte del Alguarismo* solo aparecen en el caso de los problemas de aleaciones, el 12% de la colección, considerados especialmente difíciles para el mercader o en los muy escasos de geometría, el 4%, con la clara intención de reforzar la explicación y favorecer el aprendizaje. Resulta interesante destacar como el autor del *Arte del Alguarismo* ha sistematizado la solución de los problemas de aleaciones con procedimientos específicos, explicados sutilmente en dos de ellos y que se completa con un gráfico que de forma fácil e inmediata nos permite conocer cómo realizar una aleación para obtener la ley que necesitamos. Un dibujo aclara el texto y proporciona una regla de resolución. El propio autor nos señala la utilidad del dibujo con la expresión... *faz una fegura como esta...* y *faz tu fegura segund aquí esta ...* que incluye en el propio enunciado de dos problemas. En un tercero incorpora la figura sin advertirlo en el texto<sup>43</sup>.




---

suma 9 marcos

---

40 Son expresiones que aparecen en *El Arte del Alguarismo*, en los problemas n° 49, 69, 74, 75 // 102, 118, 123, 125, 126 // 109, 120 // 144 y prácticamente en todos los problemas de estas colecciones.

41 *El Arte del Alguarismo*, en el problema n° 108 <miémbrate que cualquier cuenta que ayan de fazer semejante en que ayan maravedis e dineros que lo as todo de faser dineros...>

42 Se debe tener cuidado no confundir los signos propios del manual con aquellos realizados con posterioridad por mano diferente a la del autor.

43 Inserta el dibujo en el texto de los problemas 163 y 164. En el problema n° 166 inserta la figura pero no lo refleja en el texto.

También el autor del manuscrito custodiado en la Biblioteca Nacional de Madrid<sup>44</sup> es consciente de la dificultad que suponía este tipo de problemas para los mercaderes, pues en los 10 problemas de aleaciones de un total de 76 que componen la colección, se esmera por facilitar su comprensión y aprendizaje. Evita innumerables repeticiones, inútiles y tediosas, que en muchos casos redundaría en su peor aprovechamiento. Sin embargo no incluye gráficos o dibujos complementarios.

La inclusión de operaciones también resulta escasa en los primeros manuales y más abundantes en las últimas. Apenas se incluyen en *El Arte del Alguarismo*<sup>45</sup> y sí aparecen en *De Arithmetica*, colección posterior. Este manuscrito concluye con la inserción de unas tablas de multiplicar con el fin de facilitar su aprendizaje, su memorización. El autor diferencia entre *Tabla menor* y *tablas mayores*<sup>46</sup>. La *tabla menor* consiste en una simple relación de las tablas del 1 al 9; mientras que las *tablas mayores*, además de incluir las anteriores, nos presentan la de números más elevados: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 29, 31, 33, 37, 41, 43, 47, 51, 53, 57, 59, 61 en las que también aparecen resultados de multiplicar números superiores a 10, que igualmente debían memorizarse. Tablas de multiplicar también inserta Mosén Juan de Andrés en su manual, elaborado ya en los primeros años del siglo XVI, que es sin duda en el que aparecen el mayor número de ejemplos de este tipo. Se inicia con un dibujo en el que aparecen números y el «lenguaje digital», muy al uso en el periodo, y continúa con varias tablas de multiplicar y diferentes ejemplos de restas, multiplicaciones y progresiones<sup>47</sup>.

- También, en ocasiones, nos muestra como puede verificarse el resultado animándonos a realizar la prueba para comprobar que la operación está bien hecha ... *para saber sy estas cuentas se fassen bien fechas e bien çiertas, hase de faser la prueva desta manera*<sup>48</sup>... En el caso de esta cita, la prueba permite, además, insistir en conocimientos ya adquiridos pues se trataba de comprobar el resultado de una resta. Con la prueba demuestra que la suma —que ya la había explicado— y la resta son operaciones opuestas. Expresiones ... *sy qui-*

44 Biblioteca Nacional, Raros, Ms. 10.106. De su existencia da noticia el trabajo de José María Millás Vallicrosa, *Las traducciones orientales en los manuscritos de la Biblioteca Catedral de Toledo*, Madrid, 1942, p. 91.

45 Debemos evitar como ya advertimos atribuir al primer autor los añadidos posteriores. Éstos son muy abundantes en este manuscrito. Aparecen en los márgenes sobre todo cuando se explican las operaciones elementales, espeçias, que preceden a los problemas. También aparecen en estos márgenes algunas manos dibujadas y la expresión «ojo!»

46 Real Academia Española, Ms. 145, fol. 161r.-164r.

47 La tabla en la que aparecen los números y el lenguaje digital, se trata de la misma tabla que reproduce Luca Pacioli en *Suma Arithmetica, Geometría, Proportioni et Proporcionalita*, publicada en Venecia en 1494. A su vez, ésta recuerda la de Beda el Venerable en *De rationi temporarum* aunque en el caso veneciano y en el que aquí reproducimos los «cientos» y los «miles» se cuentan con la mano derecha.

48 *El arte del alguarismo*, p. 137.

*sieres fazer la prueba, fasla desta manera... o e para saber sy esta cuenta es fecha bien fas la prueba como aquí esta asygnada ... e sy no te saliere tanto, no es çierta la cuenta*<sup>49</sup>... se encuentran en diversos textos de problemas. Normalmente la comprobación se realiza en aquellos problemas de mayor complejidad en los que podríamos tener alguna duda sobre la veracidad del resultado.

- Algunos autores queriendo demostrar su notable maestría y destreza, nos muestran un doble método, presentándonos dos alternativas para llegar a la solución correcta. *Otro sy, sy quisieres fazer esta cuenta o regla por otra manera... y esta quenta misma, sy la quisieres fazer por otra manera, bien lo puedes fazer*<sup>50</sup>, o *asy por estos dos modos faras estas e otras semejantes quantas*<sup>51</sup>.
- De manera muy excepcional, se permiten advertirnos que algunos cálculos no resultan demasiado útiles; no obstante, enseña a hacerlos ... *Moguer que non es cosa que sea provechosa*<sup>52</sup>.

La existencia de estos manuales y su metodología docente constituyen una prueba de la práctica en Castilla de la actividad didáctica de esta nueva disciplina puesta al servicio de un comercio activo, aunque no hayamos encontrado ningún dato que nos permita hablar de su enseñanza de institucionalizada y con unos programas concretos como en Italia. El cálculo mercantil, no fue objeto de atención universitaria durante la Edad Media, pero su estudio, claramente cuidado, lo consideramos fruto de una misma demanda social, unas nuevas necesidades claramente propiciadas por el desarrollo urbano. Los jóvenes que se afanaban en su aprendizaje compartían aptitudes, responsabilidades y compromisos. Los objetivos de la enseñanza eran coherentes y estaban relacionados claramente con sus intereses que a muy a largo plazo, no eran otros que mejorar en su gestión empresarial.

---

49 Ver, por ejemplo, los problemas 88, 89, 110, del *Arte del Alguarismo*.

50 Problemas números 125 y 128 del *Arte del Alguarismo*.

51 Fol. 145v. de *De Arismetica*.

52 Expresión que aparece tras el problema 175 del *Arte del Alguarismo*.